# Die Mathematik – Königin der Wissenschaften. Eine Einladung zum Mitdenken

**Joachim Escher**

Institut für Angewandte Mathematik
Leibniz Universität Hannover

SommerUni, Hannover, 31. August 2015

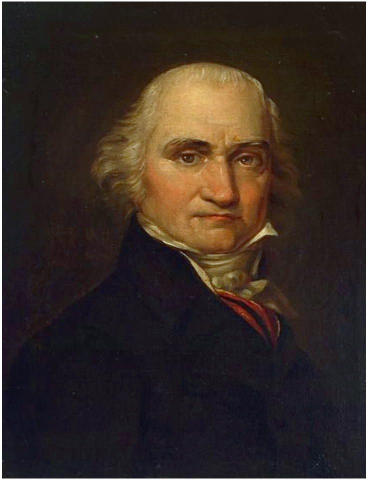
## Das Zitat

Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften.

## Das Zitat

Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften.

*,,Die Mathematik ist die Königin aller Wissenschaften. Ihr Liebling ist die Wahrheit, ihre Kleidung Einfachheit und Klarheit. Ihr Palast ist von Dornengehölz umwachsen, wer zu ihm gelangen will, muß sich durch dieses Dickicht kämpfen. Ein zufälliger Reisender wird im Palast nichts Anziehendes finden. Seine Schönheit öffnet sich nur dem Verstand, der die Wahrheit liebt, der beim Überwinden von Schwierigkeiten hart wurde und der Zeuge ist für die erstaunliche Neigung des Menschen zu verworrenen, aber unerschöpflichen und erhabenen geistigen Genüssen."*



Jan Śniadecki, 1756 – 1830

,,*Die Mathematik ist die Königin der Wissenschaften und die Arithmetik* (gemeint ist die Zahlentheorie, JE) *ist die Königin der Mathematik!"*

Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855

*„Trau keinem Zitat, das du nicht selbst aus dem Zusammenhang gerissen hast"*,

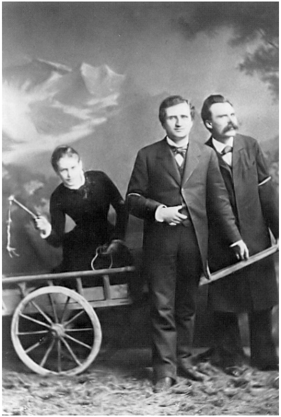
Johannes Rau zitiert in Handelsblatt (07.02.2006)

*,,Wenn Du zum Weibe gehst, vergiss die Peitsche nicht!"*

- Das Zitat stammt nicht von Schopenhauer!
- In Friedrich Nietzsches ,,Also sprach Zarathustra" (1883) finded man

*,,Du gehst zu Frauen? Vergiss die Peitsche nicht!"*

- Nietzsche legt dieses Zitat – in dem von Frauen und nicht von Weibern die Rede ist – auch nicht Zarathustra, sondern in einem Dialog einem ,,alten Weiblein" in den Mund!

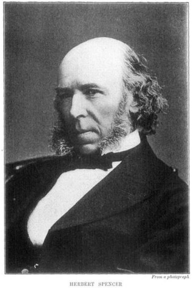


≪Die Dreieinigkeit≫: Lou von Salomé, Paul Rée und Friedrich Nietzsche; Mai 1882. (Bild: AKG)

Leibniz Universität Hannover

## „Survival of the fittest"

- Das Zitat stammt nicht von Charles Darwin!
- Es wurde 1864 vom Sozialphilosophen Herbert Spencer in der Diskussion um Darwins Theorie geprägt. Ab 1869 übernimmt Darwin dieses Zitat.




Herbert Spencer, 1820-1903

## Was sind aktuelle Fragestellungen der mathematischen Grundlagenforschung?

Was sind aktuelle Fragestellungen der mathematischen Grundlagenforschung?

## Mathematischer Volksmund

*,,Mathematik ist die Kunst, das Rechnen zu vermeiden!"*

Here $\beta_0^2 = 1/2 + k_0$ and $k_0$ is a constant yet to be determined. Using relations (2.10) and (3.4) above, and neglecting terms of order $\mathcal{O}(\epsilon, \delta^2)$, yields

$$\left(u_0 - \delta^2\left(\frac{1}{2} + k_0\right)u_{0xx}\right)_t + \mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon\delta^2) = -\epsilon\left(1 - c^2\frac{2k_2 + k_1^2}{k_1}\right)\left(\frac{u_0^2}{2}\right)_x - \delta^2\left(\frac{k_3}{k_1} + \frac{\alpha}{3} + k_0 c\right)u_{0,xxx} - \frac{1}{2\epsilon k_1}(\theta^2)_x. \tag{3.17}$$

At this point we reexpress the $\theta^2$ term in (3.17) in terms of $\rho^2$ using

$$\theta = 1 + \epsilon\theta_0, \tag{3.18}$$

where $\theta_0$ is of order $\mathcal{O}(1, \epsilon, \delta^2)$. Retaining terms to order $\mathcal{O}(\epsilon^2, \epsilon\delta^2)$, we may use a Taylor expansion to write

$$\theta^{2(a-1)} = 1 + 2(a-1)\epsilon\theta_0 + (a-1)(2a-3)\epsilon^2\theta_0^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3, \epsilon^2\delta^2) = \rho^2 \tag{3.19}$$

and as such

$$\epsilon 2\theta_0 = \frac{1}{a-1}\rho^2 - \epsilon^2(2a-3)\theta_0^2 - \frac{1}{a-1} + \mathcal{O}(\epsilon^3, \epsilon^2\delta^2). \tag{3.20}$$

In addition it follows from (3.2) that

$$\epsilon 2\theta_0 = \theta^2 - 1 - \epsilon^2\theta_0^2. \tag{3.21}$$

Comparing (3.20) and (3.21), we find

$$\theta^2 = \frac{1}{a-1}\rho^2 - \epsilon^2 2(a-2)\theta_0^2 + \frac{a-2}{a-1} + \mathcal{O}(\epsilon^3, \epsilon^2\delta^2). \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} = \frac{127}{128}$$

## Vermutung:

Diese Prozess läßt sich beliebig lange fortführen und liefert als Ergebnis eine Zahl (Bruch), die stets kleiner ist als 1, diesem Wert jedoch beliebig nahe kommt.

Weiteres Beispiel:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} = 0.8333\ldots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{13}{12} = 1.0833\ldots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{60} = 1.2833\ldots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{87}{60} = 1.45$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{669}{420} = 1.5929\ldots$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{1443}{840} = 1.7179\ldots$$

Wie im ersten Beispiel liegt ein Verfahren vor, welches eine wachsende Folge von Zahlen erzeugt:

$$05,\ 0.8333\ldots,\ 1.0833\ldots, 1.2833\ldots, 1.45,\ 1.5929\ldots,\ 1.7179\ldots$$

**Frage:**

Ist diese Zahlenfolge wie im ersten Beispiel nach oben beschränkt?

Wie im ersten Beispiel liegt ein Verfahren vor, welches eine wachsende Folge von Zahlen erzeugt:

$$05,\ 0.8333\ldots,\ 1.0833\ldots, 1.2833\ldots, 1.45,\ 1.5929\ldots,\ 1.7179\ldots$$

**Frage:**

Ist diese Zahlenfolge wie im ersten Beispiel nach oben beschränkt?

**Antwort: Nein!**

Weitere Zahlenwerte für diese Verfahren:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{100}\approx 3.6052\ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{1000}\approx 5.9078\ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10^6}\approx 12.8155\ldots$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10^{100}}\approx 229.2585\ldots$$

Frage: Kann man

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10^{100}} \approx 229.2585\ldots$$

berechnen?

Science fiction: Wir nehmen an, dass in jedem Milligramm der Milchstraße ein Rechner mit der Leistung von $10^{12}$ Additionen und Divisionen pro Sekunde realisiert werden kann.

Masse der Milchstraße:

$$1.4 \cdot 10^{11} \cdot \underbrace{1.989 \cdot 10^{30}\, kg}_{\text{Masse der Sonne}} = 2,78 \cdot 10^{47}\, mg$$

Somit ergibt sich für die ,,Rechenzeit" von

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10^{100}} \approx 229.2585\ldots$$

mit $3 \cdot 10^{47}$ Rechnern in Jahren:

$$\frac{2 \cdot 10^{100}}{3 \cdot 10^{47} \cdot 10^{12} \cdot 60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 364} = \frac{2 \cdot 10^{100}}{0.95 \cdot 10^{67}} = 2 \cdot 10^{33} \text{ Jahre.}$$

Alter des Universums: $1.5 \cdot 10^{10}$ Jahre!

Fazit: die Summe

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{10^{100}} \approx 229.2585\ldots$$

kann mit Rechnern nicht bestimmt werden!

## Bemerkungen:

- Wenn es nicht berechenbar ist, wie kommt das Ergebnis zustande? Ist es überhaupt richtig?
- Mathematische Fragestellung I: Wie kann man Fall 1 von Fall 2 unterscheiden?
- Mathematische Fragestellung II: Im Fall 1: Kann man die Grenze bestimmen?
- Mathematische Fragestellung III: Im Fall 2: Wie schnell wächst die Zahlenfolge?
- Zurück zur „Nichtberechenbarkeit": Ca. 100 Jahre Entwicklung.
  - G. W. Leibniz (1646 – 1716)
  - B. Taylor (1685 – 1731)
  - J. L. Lagrange (1736 – 1813)

Leonhard Euler, *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et des Belles–Lettres de Berlin*, 1755 [Drucklegung: 1757].

# PRINCIPES GÉNÉRAUX

## DE L'ETAT D'EQUILIBRE DES FLUIDES.

PAR. M. EULER.

I.

Je me propoſe ici de développer les principes, ſur lesquels toute l'Hydroſtatique, ou la Science de l'équilibre des fluides, eſt fondée. Pour leur donner la plus grande étenduë dont ils ſont ſuſceptibles, je renfermerai dans mes recherches non ſeulement les fluides, qui ont partout le même degré de denſité, tels que ſont l'eau, & les autres corps liquides, dont on dit, qu'ils ne reçoivent aucune compreſſion; mais auſſi ces fluides, qui ſont compoſés de particules d'une denſité différente, ſoit que cette différence leur convienne en vertu de leur propre nature, ſoit qu'elle réſulte des forces, dont les particules ſe preſſent mutuellement. On voit bien qu'à cette derniere eſpece, il faut rapporter l'air, & les autres corps fluides, qu'on nomme élaſtiques. Outre cela je ne bornerai pas mes recherches à la ſeule force de gravité; mais je les étendrai à des forces quelconques, dont chaque particule du fluide puiſſe être ſollicitée.

II. Voilà le plan, que je me ſuis propoſé d'exécuter, d'où il eſt d'abord clair, que les principes communs de l'Hydroſtatique, qu'on trouve expliqués dans les élémens, ne ſont qu'un cas très particulier de ceux, que je m'en vais établir ici. Car d'un coté on ne regarde communément que la gravité, à l'action de laquelle les particules du fluide ſont aſſujetties; & de l'autre coté on ne conſidère que les flui-

*Mém. de l'Acad.* Tom. XI    E e    des

**Leonhard Euler (1755)** [a]

*"Nevertheless, I hope to arrive at an equally successful conclusion, so that, if difficulties remain, they will pertain not to Mechanics but purely to Analysis, this science not yet having been brought to the degree of perfection necessary to develop analytical equations that embody the principles of fluid motion."*

[a] T. E. Burton, in *Fluid Dynamics, 34*, Springer (1999)

## Typen von Wasserwellen

- Wind sea: Wellen, die unmittelbar von lokalen Winden generiert und beeinflusst werden und die sich aus verschiedenen Geschwindigkeiten, Wellenlängen und Amplituden zusammensetzen.
- Hochseewellen, ocean swells: Zeigen ein regelmäßiges Muster mit gleichartigen Geschwindigkeiten und Wellenlängen.
- Kapillarwellen: Wellen, die entlang eines Phasenrandes eines Fluids durch Oberflächenspannungseffekte entstehen.

# Hochseewellen

# Hochseewellen

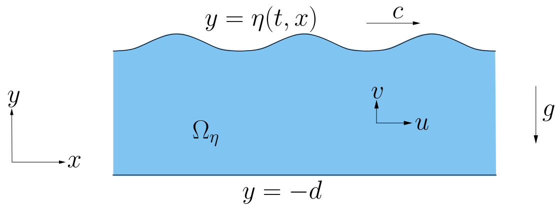
# Hochseewellen

# Hochseewellen

# Hochseewellen

# Wind sea

# Kapillarwellen




Ziel ist die Beschreibung zweidimensionaler Wasserwellen, die sich periodisch in eine Richtung fortpflanzen:

- $y = \eta(t,x)$ ist die Wellenoberfläche;
- $y = -d$ ist das flache Gerinne;
- $(u, v)$ ist das Geschwindigkeitsfeld;
- $g$ ist die Erdbeschleunigung;
- $c > 0$ ist die konstante Wellengeschwindigkeit.

Wir betrachten eine nichtviskose Strömung mit Gravitation als einzige Rückstellkraft. Newtonsches Bewegungsgesetz (Impulserhaltung):

- Eulersche Gleichungen (Bewegungsgleichungen)

$$\left.\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y &= -P_x \\ v_t + uv_x + vv_y &= -P_y - g \end{aligned}\right\} \quad \text{in} \quad \Omega_\eta$$

  - $P$ : hydrodynamischer Druck
  - $g$ : Erdbeschleunigung

Notation:

$$u(t,x,y), \ v(t,x,y), \ P(t,x,y)$$

System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen.

# Euler versus Navier-Stokes

- Nichtviskose (reibungsfreie) Strömung $\Longrightarrow$ Euler Gleichungen.
- Viskose Strömung $\Longrightarrow$ Navier-Stokes-Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y &= \nu\Delta u - P_x \\ v_t + uv_x + vv_y &= \nu\Delta v - P_y - g \end{aligned}\right\} \quad \text{in} \quad \Omega_\eta$$

  - $\nu$ : Koeffizient der kinematischen (Newtonschen) Viskosität;
  - $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ : Laplace Operator.

# Dissipation von Energie

Prinzipielle Energiedissipationen:

- innere Reibung oder Viskosität;
- Bodenreibung (Randschichten der Dicke 1–15mm);
- Oberflächenspannung (relevante Wellenlängen $\leq$ 1.7cm).

- Hochseewellen: 1'000m Tiefe, 10m$-$100m Wellenlänge;
- Wellen in Wellenkanälen: 5m Tiefe, 1m$-$10m Wellenlänge.

Im Falle von Hochseewellen führt Viskosität zu einer sehr schwachen Dämpfung: Die Reduktion $A(t)$ der Amplitude einer Welle durch Viskosität kann wie folgt approximiert werden:

$$A(t) \approx \exp(-8\pi^2 \nu t/\lambda^2)A(0).$$

Dabei ist $\lambda$ die Wellenlänge und $\nu$ die kinematische Viskosität.

- Eine Hochseewelle mit $\lambda = 20\mathrm{m}$ benötigt demnach zwei Tage für eine Reduktion der Amplitude um 3%.
- Wellen mit $\lambda = 2\mathrm{m}$ in einem Wassertank behalten nach einer Beobachtungszeit von $t = 300\mathrm{s}$ immer noch 99.46% ihrer Amplitude.

# Die Eulerschen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} u_t + uu_x + vu_y &= -P_x \\ v_t + uv_x + vv_y &= -P_y - g \\ u_x + v_y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{in} \quad \Omega_\eta$$

Beschreiben jede hydrodynamische Strömung in $\Omega_\eta$.

# Fragestellungen

- Existenz von Lösungen
- Eindeutigkeit von Lösungen
- Eigenschaften von Lösungen (Regularität, Symmetrie, Periodizität, ...)

ABOUT PROGRAMS MILLENNIUM PROBLEMS PEOPLE PUBLICATIONS EUCLID EVENTS

# Millennium Problems

## Yang–Mills and Mass Gap

Experiment and computer simulations suggest the existence of a "mass gap" in the solution to the quantum versions of the Yang-Mills equations. But no proof of this property is known.

## Riemann Hypothesis

The prime number theorem determines the average distribution of the primes. The Riemann hypothesis tells us about the deviation from the average. Formulated in Riemann's 1859 paper, it asserts that all the 'non-obvious' zeros of the zeta function are complex numbers with real part 1/2.

## P vs NP Problem

If it is easy to check that a solution to a problem is correct, is it also easy to solve the problem? This is the essence of the P vs NP question. Typical of the NP problems is that of the Hamiltonian Path Problem: given N cities to visit, how can one do this without visiting a city twice? If you give me a solution, I can easily check that it is correct. But I cannot so easily find a solution.

## Navier–Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

## Hodge Conjecture

The answer to this conjecture determines how much of the topology of the solution set of a system of algebraic equations can be defined in terms of further algebraic equations. The Hodge conjecture is known in certain special cases, e.g., when the solution set has dimension less than four. But in dimension four it is unknown.

## Poincaré Conjecture

In 1904 the French mathematician Henri Poincaré asked if the three dimensional sphere is characterized as the unique simply connected three manifold. This question, the Poincaré conjecture, was a special case of Thurston's geometrization conjecture. Perelman's proof tells us that every three manifold is built from a set of standard pieces, each with one of eight well-understood geometries.

## Birch and Swinnerton-Dyer Conjecture

Supported by much experimental evidence, this conjecture relates the number of points on an elliptic curve mod p to the rank of the group of rational points. Elliptic curves, defined by cubic equations in two variables, are fundamental mathematical objects that arise in many areas: Wiles' proof of the Fermat Conjecture, factorization of numbers into primes, and cryptography, to name three.

Leibniz Universität Hannover

## Navier–Stokes Equation

This is the equation which governs the flow of fluids such as water and air. However, there is no proof for the most basic questions one can ask: do solutions exist, and are they unique? Why ask for a proof? Because a proof gives not only certitude, but also understanding.

## Hodge Conjecture

The answer to this conjecture determines how much of the topology of the solution set of a system of algebraic equations can be defined in terms further algebraic equations. The Hodge conjecture is known in certain special cases, e.g., when the solution set has dimension less than four. But in dimension four it is unknown.

## Poincaré Conjecture

In 1904 the French mathematician Henri Poincaré asked if the three dimensional sphere is characterized as the unique simply connected three manifold. This question, the Poincaré conjecture, was a special case of Thurston's geometrization conjecture. Perelman's proof tells us that every three manifold is built from a set of standard pieces, each with one of eight well-understood geometries.

# Rules for the Millennium Prizes

See also:

Notes on the Rules

Publication Guidelines

The Clay Mathematics Institute (CMI) has named seven "Millennium Prize Problems." The Scientific Advisory Board of CMI (SAB) selected these problems, focusing on important classic questions that have resisted solution over the years. The Board of Directors of CMI designated a $7 million prize fund for the solutions to these problems, with $1 million allocated to each. The Directors of CMI, and no other persons or body, have the authority to authorize payment from this fund or to modify or interpret these stipulations. The Board of Directors of CMI makes all mathematical decisions for CMI, upon the recommendation of its SAB.

The SAB of CMI will consider a proposed solution to a Millennium Prize Problem if it is a complete mathematical solution to one of the problems. (In the case that someone discovers a mathematical counterexample, rather than a proof, the question will be considered separately as described below.) **A proposed solution to one of the Millennium Prize Problems may not be submitted directly to CMI for**

Leibniz Universität Hannover

**Euler hatte recht !**

**Vielen Dank !**